Άσκηση: Να γίνει το ίδιο χρησιμοποιώντας το πρόβλημα:

$$\min 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

15/4/19

Λύση (D)

$$\max 4w_1 + 2w_2 + 6w_3$$

$$w_1 + \quad + w_3 \leq 3$$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq 2$$

$$w_1 - w_2 + w_3 \leq 1$$

$$w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \in \mathbb{R}$$

(Συνέχεια στο βιβλίο Λαδά)

Τελικά $W_1 = z_6 - c_6 + c_6 = 3$ $\qquad W_3 = z_7 - c_7 + c_7 = 1$

$W_2 = z_5 - c_5 + c_7 = 0$

$z_4 - c_4 = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \leq 0$

$-w_1 \leq 0 \Rightarrow w_1 \geq 0$

$z_5 - c_5 = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 \leq 0 \Rightarrow w_2 \leq 0$

$(z_7 - c_7) = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - M \leq 0 \Rightarrow w_3 - M \leq 0$

$$z_j - c_j = \underline{w}' P_j - c_j$$
$$= (w_1, w_2, \ldots, w_m)\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\\alpha_{2j}\\\vdots\\\alpha_{mj}\end{pmatrix} - c_j$$

$\alpha_{1j} w_1 + \alpha_{2j} w_2 + \ldots + \alpha_{mj} w_m - c_j$ Ευκαιριακό κόστος:

$z(x(\theta)) = z_0 - \theta(z_j - c_j)$

- Αν έχω τη λύση του (Π) χωρίς να έχω το τελικό θα προσπαθήσω να βρω τη λύση του (Δ)

Θεώρημα Αν $\hat{x}$, $\hat{w}$ είναι άριστες λύσεις του (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

τότε $\hat{x}(\alpha_1 \hat{w}_1 + \underbrace{\ldots}_{(z_i - c_i)} + \alpha_m \hat{w}_m - c_i) = 0$ (Θεώρ. Συμπληρωματικής Χαλαρότητας)

$\hat{w}_i(\alpha_{11}\hat{x}_1 + \ldots + \alpha_{m1}\hat{x}_n - b_i) = 0$

Απόδ. $\hat{w}' = c_B' B^{-1}$

Παρ/δ (από προηγ. μάθημα)

x_1 αριθμός θρανίων

x_2 αριθμός τραπεζιών

x_3 αρ. καρεκλών

$$\max 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$ (ξυλεία)

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8$ (ώρες κατασκευής)

$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$ (ώρες φινιρίσματος)

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(Δ) $\min 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$

$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \ge 60$

$6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \ge 30$

$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \ge 20$

$w_1, w_2, w_3 \ge 0$

Ψάχνω τα w_1, w_2, w_3

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 8$

$z = 280$

$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 = 60$

$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 = 20$

$w_1 = 0$

$w_2 = 10 \quad w_3 = 10$

γτ $x_1, x_3 \ge 0$ παίρνω τους περιορισμούς και βγάζω ότι $w_1 = 0$

$w_1 = 0$ συμβολίζει τη περισσευούμενη ξυλεία που έχω. Αν έρθει δηλ. κάποιος να μου πουλήσει ξυλεία δεν θα αγοράσω

Παράδειγμα

$\max 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10$

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4$

(Δ) $\min 12w_1 + 10w_2 + 10w_3$

$2w_1 + w_2 + 3w_3 \geq 4$

$3w_1 + 4w_2 + w_3 \geq 2$

$w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 3$

$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} 2w_1 + w_2 + 3w_3 \\ w_1 + 2w_2 + w_3 = 3 \end{array}\right\} w_1 = 0$

$w_2 = w_3 = 1$

Παρ.

$\max 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 + 12x_5$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 \leq 18$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 6$

$x_i \geq 0$

(Δ) $\min 18w_1 + 6w_2$

$2w_1 + w_2 \geq 10$ *

$w_1 + w_2 \geq 6$

$w_1 - w_2 \geq 4$ *

$w_2 \geq 1$

$3w_1 + 2w_2 \geq 12$

$w_1, w_2 \geq 0$

Λύνεται γραφικά

$w_1 = 2 \quad w_2 = 6 \quad u = 72$

Η λύση του πρωτεύοντος θα είναι:

$2x_1 + \cancel{x_2} + x_3 \quad \cancel{+3x_5} = 18$ επειδή $w_1, w_2 \geq 0$

$x_1 + \cancel{x_2} - x_3 + x_4 + \cancel{2x_5} = 6$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 18 \\ x_1 - x_3 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 8 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα SOS

Δίνεται το Tableu

			-1	2	-3	0	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	-1	11	1	-1/2	1	1	0	0
P_5	0	0	0	2	-1	0	1	0
P_6	0	8	0	0	0	2	0	1
	2	-11	0	-3/2	2	-1	0	0

			-1	2	-3	0	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P_1	-1	7	1	0	3/4	0	1/4	-1/2
P_2	2	0	0	1	-1/2	0	1/2	0
P_4	0	4	0	0	0	1	0	1/2
	2	-7	0	0	5/4	0	3/4	1/2

$\max -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 11$$
$$2x_2 - x_3 \le 0$$
$$2x_4 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

(D) $\min 11w_1 + \quad + 3w_3$

$$w_1 \ge -1$$
$$-\frac{1}{2}w_1 + 2w_2 \ge 2$$
$$w_1 - w_2 \ge -3$$
$$w_1 + 2w_3 \ge 0$$
$$w_2, w_3 \ge 0 \quad w_1 \in R$$

$w_1 = (z_1 - c_1) + c_1 = -1$

$w_2 = (z_5 - c_5) + c_5 = 3/4$

$w_3 = (z_6 - c_6) + c_6 = 1/2$

Άσκηση

			1	1	0	0	0	-M
B	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_6	-M	1	1	1	-1	0	0	1
P_4	0	1	1	-1	0	1	0	0
P_5	0	+1	-1	1	0	0	1	0
		-M	-1-M	-1-M	+M	0	0	0

			1	1	0	0	0	-M
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	1	1	1	-1	0	1	0	0
P_3	0	0	0	-2	1	1	0	-1
P_5	0	2	0	0	0	1	1	0
		1	0	-2	0	1	0	M

1) Να διατυπωθεί το πρόβλημα
2) Να συμπληρωθεί το τελικό tableau (•)
3) Να δωθεί ~~...~~ η λύση του προβλ.
4) Δυϊκό, έχει λύση;

1) $\max x_1+x_2$

$x_1+x_2 \geq 1$

$x_1-x_3 \leq 1$

$-x_1+x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

3) P_2 στο τελικό ταμπλό είναι όλη η στήλη αρνητική. Άρα μη φραγμένο δεν έχει!

4) (Δ) $\min w_1+w_2+w_3$

$w_1+w_2-w_3 \geq 1$

$w_1-w_2+w_3 \geq 1$

$w_1 \leq 0 \quad w_2, w_3 \geq 0$ Και αυτό χωρίς λύση.

Σπιτι

3.6 Βασιδειων (Θα πρέπει να επεκτείνουμε το ~~...~~ ταμπλό βάζοντας P_1, P_4

Άσκηση

$\max 2x_1-3x_2+x_3+2x_4$

$x_1+2x_2+x_3+2x_4=8$

$x_2+x_3+x_4=6$

$2x_2-x_4=3 \qquad x_i \geq 0$

Η λύση θα είναι $\underset{\sim}{x}=\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right)'$

Παράδειγμα

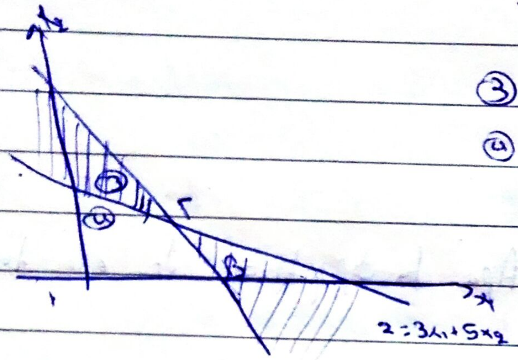
$\max\ 3x_1 + 5x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 230$ (3)

$x_1 + 2x_2 \leq 250$ (4)

$x_1 \leq 150$ (5)

$x_1, x_2 \geq 0$ (1),(2)



③ $2x_1 + x_2 \leq 230$

④ $x_1 + 2x_2 \leq 250$

$-\frac{c_1}{c_2}$ κλίση αντικ. συνάρτησης

$-2 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.5$

$-2 \leq -\frac{c_1}{5} \leq -0.5$ Κάθε φορά περιορίζω τον ένα από τους 2 συντελεστές (αλλάζει η κλίση, μετακινείται η ευθεία)

$-2 \leq -\frac{3}{c_2} \leq -0.5$

—

x_k μη βασική μεταβλητή

$z_k - (c_k - \Delta c_k) \geq 0 \Rightarrow \Delta c_k \leq z_k - c_k$

x_{Br} βασική μεταβλητή

$\hat{c}_B = (c_{B1}, c_{B2}, \dots, c_{Br} + \Delta c_{B}, \dots, c_{Bm})$

$z_j - c_j = \hat{c}_B' B^{-1} P_j - c_j \geq 0 \quad \forall j$

$= c_B' B^{-1} P_j + (0, \dots, \Delta c_{Br}, \dots, 0) \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ y_{rj} \\ y_{mj} \end{pmatrix} - c_j$

$= z_j - c_j + \Delta c_{Br} y_{rj} \geq 0$

$\Delta c_{Br} \cdot y_{rj} \geq -(z_j - c_j)$

Αν $y_{rj} > 0$ $\quad \Delta c_{Br} > -\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}$

Αν $y_{rj} < 0$ $\quad \Delta c_{Br} < -\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}$

$$\max_j \left\{ -\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}} , y_{rj} > 0 \right\} \leq \Delta c_{Br} \leq \min_j \left\{ -\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} , y_{rj} \leq 0 \right\}$$

Στο παράδειγμα με τα δρομολόγια, στο τελικό ταμπλό αλλάζω το c_B

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ 20 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -2 \\ -1.25 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(60+\Delta c_1)(-1.25) + 40 - 30 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ 20 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -8 \\ 1.5 \\ -4 \end{pmatrix} - 0 \geq 0 \qquad (60+\Delta c_1)1.5 - 4 \cdot 20 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 \geq 0$$

$$(-0.5)(60+\Delta c_1) + 2 \cdot 20 \geq 0$$

$\Delta c_1 \geq -4$

$\Delta c_1 \geq -\frac{20}{3}$

$\Delta c_1 \leq 20$

$-4 \leq \Delta c_1 \leq 20$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\hat{b} = b + \Delta b_k e_k$ $\qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-θέση

$$\boxed{\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b_k e_k \geq 0} \qquad \forall i \quad x_{B_i} + \Delta b_k y_{ik} \geq 0$$

Αν $y_{ik} < 0$ $\quad \Delta b_k < -\dfrac{x_{Bi}}{y_{ik}}$

Αν $y_{ik} > 0$ $\quad \Delta b_k > -\dfrac{x_{Bi}}{y_{ik}}$

$$\max\left\{-\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ y_{ik}>0\right\} < \Delta b_k < \min\left\{-\frac{x_{Bi}}{y_{ik}},\ y_{ik}<0\right\}$$

Αλλαγη στο b_1

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = B^{-1}b + \Delta b_k B^{-1} e_k$$

$$\begin{pmatrix}24\\2\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Delta b_1\\0\\0\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \Delta b_1 \geq -24$$

Αλλαγη στο b_2

$$\begin{pmatrix}24\\2\\8\end{pmatrix} + \Delta b_2\begin{pmatrix}-8\\1.5\\4\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad -\frac{2}{1.5} \leq \Delta b_2 \leq \min\left\{\frac{24}{8}, \frac{8}{4}\right\}$$

Αλλαγη b_3

$$\begin{pmatrix}24\\2\\8\end{pmatrix} + \Delta b_3\begin{pmatrix}2\\-0.5\\2\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \max\left\{-\frac{24}{2}, -\frac{8}{2}\right\} \leq \Delta b_3 \leq \frac{-2}{-0.5}$$

Lindo.com